

Reciproké rovnice

Definice. Uvažme rovnici $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

Pokud $a_k = a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice *reciproká rovnice 1. druhu*.

Pokud $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice *reciproká rovnice 2. druhu*.

Poznámka. 1. druh: první a poslední koeficient se rovnají, druhý a předposlední se rovnají, atd. ...

2. druh: první a poslední koeficient se ve znaménku, druhý a předposlední se liší ve znaménku, atd. ...

Příklad.

1. druh: $2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$

2. druh: $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x - 3 = 0$

Pokud by v poslední rovnici místo 0 bylo jiné číslo, tak by nešlo o reciprokou rovnici - 1. druhu být nemůže, neboť $a_4 \neq a_0$, a 2. druhu být nemůže, neb $a_2 \neq -a_2$ ($n = 4, k = 2$).

Platí následující:

- Je-li x kořenem reciproké rovnice, pak i $\frac{1}{x}$ je kořenem reciproké rovnice
- 1. druh lichý stupeň $\implies -1$ je kořen
- 1. druh sudý stupeň $\implies$ vytkneme $x^{\frac{n}{2}}$ a užijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$
- 2. druh $\implies 1$ je kořen

Postup: Rovnici vydělíme $(x - \text{kořen})$ nebo $x^{\frac{n}{2}}$ - podle toho o jaký typ rovnice jde (viz výše). Dostaneme reciprokou rovnici nebo rovnici, kterou již umíme vyřešit a postupujeme dál.

Příklad. Vyřešte rovnici $3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení. Zřejmě jde o rovnici 1. druhu lichého stupně. Rovnice by tedy, dle výše uvedeného, kořen -1 (lze ověřit dosazením).

$$3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0 \quad / : (x + 1) \rightarrow \text{kořen } -1$$

$$3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$$

Dostali jsme rovnici 1. druhu sudého stupně. Proto rovnici vytkneme x^2 a provedeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$.

$$3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = x^2 \left(3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$$

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{pak } 3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} = 13 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 16 = 13y + 3(y^2 - 2) + 16 =$$

$$= 3y^2 + 13y + 16 - 6 = 3y^2 + 13y + 10 = (y + 1)(3y + 10) = \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right)$$

$$\implies 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = x \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) x \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right) = (x^2 + x + 1)(3x^2 + 10x + 3) = \\ = (x^2 + x + 1)(3x + 1)(x + 3)$$

Z rozkladu je vidno, že rovnice $3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$ má kořeny $-\frac{1}{3}, -3$.

Celkově má zadaná rovnice kořeny: $-3, -1, -\frac{1}{3}$.